Korešpondenčná súťaž v školskom roku 2007/2008

Na konci minulého roka ste nám zaslali riešenia súťažných úloh druhej série korešpondenčnej súťaže, ktoré sme vám počas vianočných sviatkov opravili. Opäť sa však vyskytli tradičné chyby, ale našťastie v trochu menšom rozsahu ako pri prvej sérii.

Bohužiaľ, ani v tejto sérii sme sa nevyhli odpisovačom. Nebolo ich veľa – môžete ich nájsť vo výsledkovej listine. Je to škoda, keďže všetci odpisovači dostali za všetky svoje riešenia druhej série 0 bodov.

Riešenia 2. série úloh

1. Šejk prišiel do hotela, kde dostal izbu označenú dvojmiestnym číslom. Všimol si, že toto číslo je rozdielom štvorcov dvoch cifier, z ktorých menšia je dvojnásobkom cifry označujúcej počet jednotiek v čísle izby. Zistite, aké číslo mohla mať izba.

Riešenie: Číslo šejkovej izby je dvojmiestne, preto ho môžeme zapísať ako $\overline{ab}$, kde *a*, *b* sú cifry. Keďže *a* je cifra na mieste desiatok, tak platí $a > 0$. Číslo šejkovej izby sa dá vyjadriť ako rozdiel druhých mocnín dvoch cifier, označme ich *x* a *y*. O menšej z nich vieme, že sa rovná dvojnásobku cifry na mieste jednotiek v čísle izby, čiže $y = 2b$. Cifra môže byť číslo nanajvýš rovné 9, teda $2b \le 9$. Toto platí len pre $b \in \{0,1,2,3,4\}$. Dostávame rovnicu:

$$10a + b = x^2 - (2b)^2 .$$

Keďže číslo izby je prirodzené číslo, potom pravá strana rovnosti musí byť väčšia ako 0. To znamená, že $x^2 > (2b)^2$ a keďže cifry *x* aj 2*b* sú nezáporné, tak nerovnosť môžeme odmocniť a dostávame $x > 2b$. Rovnicu upravíme do nasledujúceho tvaru:

$$10a + 4b^2 + b = x^2 .$$

Chceme nájsť riešenia tejto rovnice. Rozoberme prípady podľa toho, aká môže byť hodnota čísla *b*.

- $\underline{b = 0}$

Dostávame rovnicu $10a = x^2$. Ľavá strana je deliteľná desiatimi, čiže aj pravá strana musí byť deliteľná desiatimi. Vieme, že $x > 2b \ge 0$ a žiadna z cifier väčších ako 0 nie je deliteľná desiatimi. Preto ani jej druhá mocnina nemôže byť deliteľná desiatimi. Rovnica nemá v tomto prípade riešenie.

- $\underline{b = 1}$

Dostávame rovnicu $10a + 5 = x^2$. Vidíme, že číslo na ľavej strane je zakončené na číslicu 5. Jedine štvorec cifry 5 je zakončený na číslicu 5. Jediné riešenie rovnice preto môže byť $x = 5$. Z toho ľahko dopočítame $a = 2$. Šejkova izba mohla teda mať číslo 21. Platí $21 = 5^2 - (2.1)^2$, čiže číslo izby 21 spĺňa podmienky zadania.

- $\underline{b=2}$

Dostávame rovnicu $10(a+1)+8=x^2$. Vidíme, že číslo na ľavej strane je zakončené na číslicu 8, ale štvorec žiadnej cifry nie je zakončený na číslicu 8 (vyskúšajte si). V tomto prípade rovnica nemá riešenie.

- $\underline{b=3}$

Dostávame rovnicu $10(a+3)+9=x^2$. Číslo na ľavej strane rovnice sa končí číslicou 9 a len štvorce cifier 3 a 7 sú zakončené na číslicu 9. Pre $x=3$ dostávame $a=-3$, avšak *a* musí byť kladné – toto nie je riešením. Pre $x=7$ dostávame $a=1$. Číslo šejkovej izby mohlo byť 13. Platí $13=7^2-(2.3)^2$ a číslo 13 spĺňa podmienky zadania.

- $\underline{b=4}$

Dostávame rovnicu $10(a+6)+8=x^2$. Táto rovnica nemá riešenie z rovnakého dôvodu ako rovnica v prípade $b=2$.

Rozobrali sme všetky prípady, ďalšie riešenia rovnice už neexistujú. Číslo šejkovej izby mohlo byť 13 alebo 21.

Komentár (opravoval Michal Takács): Najčastejším problémom bolo zle pochopené zadanie, pretože ste potom riešili úplne inú úlohu. Takéto riešenia boli hodnotené 0 bodmi. Tí, ktorí ste prekonali tento problém, väčšinou ste úlohu úspešne vyriešili. Niektorí ste zabúdali, že aj 0 je cifra. Za nerozobratie prípadu $b=0$ ste strácali 1 bod.

2. Vandal vytrhol z knihy jednu stránku. Súčet čísel strán na zvyšných stranách sa rovná 22 000. Koľko strán mala pôvodne kniha a ktorú stránku vandal vytrhol?

Riešenie: Ľahko nahliadneme, že súčet čísel strán knihy musel byť aspoň 22 003, keďže bola vytrhnutá jedna stránka a najmenšie čísla strán, ktoré na nej mohli byť, boli 1 a 2. Súčet prvých *n* čísel sa rovná

$$S(n)=\frac{1}{2}n(n+1).$$

Musí teda platiť

$$\frac{1}{2}n(n+1)\geq 22\ 003.$$

Túto nerovnicu môžeme vyriešiť viacerými spôsobmi. Prvý spôsob spočíva v riešení jednoduchej kvadratickej nerovnice v premennej *n*. Ukážeme si však riešenie, ktoré to nevyžaduje. Zamyslime sa nad hodnotami funkcie $S(n)$. Je zrejmé, že táto funkcia je rastúca. Inak povedané, ak budeme sčítavať viac prirodzených čísel, tak ich súčet bude tiež väčší. Teda ak $n<m$, tak platí $S(n)<S(m)$. Na kalkulačke zistíme, že najmenšie prirodzené číslo *n* spĺňajúce vyššie uvedenú nerovnicu sa rovná 210 (preto nemohla mať kniha menej ako 210 strán). Ak uvedený vzorec nepoznáte, tak stačilo postupne sčitovať čísla jednotlivých strán, až kým ste nedostali číslo 22 000.

Ak by mala kniha 210 strán, ich súčet by bol 22 155. Rozdiel medzi týmto číslom a číslom 22 000 je 155. To znamená, že súčet čísel vytrhnutých strán musí byť 155. To je možné len pre stránku, na ktorej sa nachádzajú strany 77 a 78. Tým sme našli prvé riešenie. Ešte dokážeme, že ďalšie neexistuje. Ak by mala kniha 211 strán (čo by teoreticky znamenalo, že posledná strana knihy by mala na poslednej stránke jedno nepárne číslo), súčet čísel všetkých strán by bol 22 366, teda súčet čísel vytrhnutých strán by musel byť 366. Posledná stránka to byť nemôže, lebo je na nej len číslo 211. Avšak ostatné stránky obsahujú jednu stranu s nepárnym a jednu s párnym číslom. Teda súčet čísel strán na vytrhnutej stránke bude nepárny, čo číslo 366 nie je. Preto musíme ísť ďalej. Ďalšie číslo je 212 a súčet čísel strán 22 578. Súčet čísel dvoch strán s najvyššími číslami v tejto knihe je $212+213=425$, čo je menej ako 578. Ak by kniha obsahovala viac ako 212 strán, tak súčet čísel všetkých strán okrem dvoch strán s najvyššími číslami bude určite väčší ako súčet čísel prvých 210 strán, teda 22 155, čo je viac ako 22 000. Preto už žiadne ďalšie riešenie neexistuje.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Podľa vašich riešení to vyzerá tak, že veľa z vás asi dlho žiadnu knihu v ruke nedržalo... Väčšina vašich riešení totiž obsahovala zásadnú chybu v tom, že ste zabudli na to, že stránka má dve strany... Dokonca aj náš časopis má takéto číslovanie strán. Za túto chybu ste strácali 1 bod. Pri riešeniach pomocou kvadratickej nerovnice ste robili chybu v tom, že ste začali riešiť kvadratickú rovnicu a potom ste nedostatočne zdôvodnili, že to stačí. Ak ste zabudli overiť, že kniha nemôže mať viac strán, stratili ste 1 bod. Ďalšie body ste strácali za nedostatočné zdôvodňovanie výpočtov.

3. Dvaja obchodníci prišli k bráne Paríža. Jeden mal 64 a druhý 20 okovov vína. Nemali však dosť peňazí na vyplatenie cla. Chýbajúce peniaze nahradili vínom. Prvý platil 40 frankov a ešte 5 okovov vína. Druhý dal 2 okovy vína a dostal naspäť 40 frankov. Koľko stál jeden okov vína a aké bolo clo zaň? Aké by platili clo a koľko by stál jeden okov vína, ak nemuseli platiť clo za víno, ktorým zaplatili clo?

Riešenie: Najprv sa budeme zaoberať prvým prípadom. Označme písmenom *o* cenu jedného okovu vína vo frankoch a písmenom *c* výšku cla vo frankoch za jeden okov vína. Na základe zadania môžeme sformulovať dve rovnice s dvoma neznámymi:

$$64c = 5o + 40,$$
$$20c = 2o - 40.$$

Jej vyriešením (či už dosadzovacou, sčítacou alebo inou metódou) dostaneme, že $c=10$ a $o=120$. Teda jeden okov vína stojí 120 frankov a clo zaň je 10 frankov.

V druhom prípade (clo sa neplatí za víno, ktorým sa platí clo) sformulujeme podobnú sústavu

$$59c = 5o + 40,$$
$$18c = 2o - 40,$$

kde sme využili to, že prvý obchodník by platil clo len za 59 okovov, pretože piatimi platil clo, podobne druhý by platil clo len za 18 okovov. Jej riešením dostaneme, že clo by bolo opäť 10 frankov, ale cena vína už len 110 frankov.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Jeden bod ste strácali, ak ste nezdôvodnili, ako ste dostali vyššie uvedené rovnice, alebo ak ste neuviedli, čo označujú vami používané premenné.

4. Uvažujte štvorciferné číslo. Premiestnite prvú číslicu zľava na koniec čísla. Toto štvorciferné číslo sčítajte s pôvodným číslom. Zistite, aké čísla si mohli myslieť Peter, Petra, Pavol a Pavla, ak im vyšli čísla 8 612, 4 322, 9 493 a 13 859 v tomto poradí.

Riešenie: Uvažujme zápis nášho štvorciferného čísla ako $\overline{abcd}$, kde a, b, c, d sú cifry, pričom $a \neq 0$. Po premiestnení dostávame číslo $\overline{bcda}$. Toto číslo má byť štvorciferné, preto musíme požadovať aj $b \neq 0$. Keďže platí

$$\overline{abcd} + \overline{bcda} = 1000a + 100b + 10c + d + 1000b + 100c + 10d + a =$$
$$= 1001a + 1100b + 110c + 11d = 11 \cdot (91a + 100b + 10c + d),$$

musí byť číslo, ktoré osoby dostali, deliteľné 11. Z uvedených štyroch čísel je jedenástimi deliteľné len 9 493, teda Peter, Petra a Pavla sa museli pri počítaní pomýliť. Ostáva nám už len Pavol. Budeme riešiť rovnicu

$$9493 = 11 \cdot (91a + 100b + 10c + d),$$

po úprave

$$100b + 10c + d = 863 - 91a.$$

Za a budeme postupne dosadzovať všetky možné cifry od 1 po 9 a číslo, ktoré dostaneme, keď od 863 odčítame $91a$, bude $\overline{bcd}$. Musíme už len skontrolovať druhú podmienku – či platí $b \neq 0$. Napríklad pre $a = 1$ dostávame, že platí

$$100b + 10c + d = 863 - 91 \cdot 1 = 772,$$

teda hľadané číslo je 1 772. Postupne dostaneme ešte riešenia 2 681, 3 590, 4 499, 5 408, 6 317, 7 226, 8 135. Pre $a = 9$ dostaneme, že by malo platiť

$$100b + 10c + d = 863 - 91 \cdot 9 = 44,$$

čo by viedlo k číslu 9 044. To však nevyhovuje, pretože po presune cifry 9 na koniec čísla dostaneme len trojciferné číslo 449.

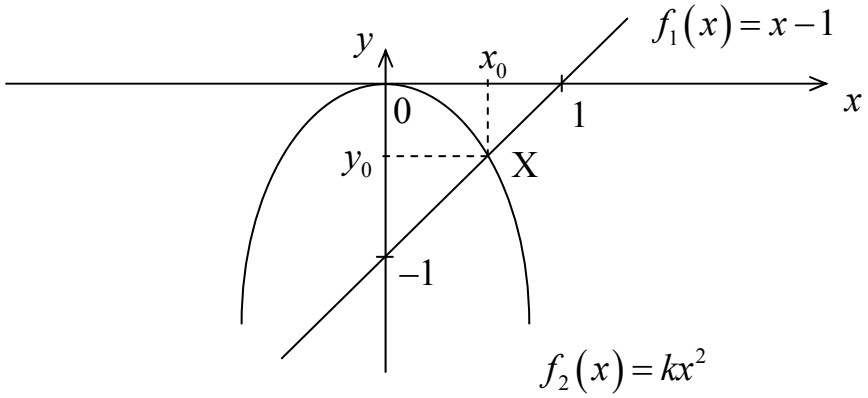
Celkovo má úloha 8 riešení: 1 772, 2 681, 3 590, 4 499, 5 408, 6 317, 7 226, 8 135.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Úloha sa dala riešiť aj postupným dosadzovaním jednotlivých číslic za a a spätným dopočítavaním ostatných cifier z výsledku. Body ste strácali za to, že ste nevyskúšali všetky možnosti, ale ste len napísali, že „pre ostatné možnosti to bude tiež platiť“. Podľa toho, koľko možností ste neoverili, ste strácali 1 až 4 body. Za nájdenie jedného riešenia ste mohli získať 1 bod.

5. Dokážte, že pre $k < 0$ má rovnica $x - 1 = kx^2$ reálny koreň z intervalu $(0,1)$.

Riešenie: Uvažujme funkciu $f(x) = kx^2 - x + 1$. Riešenie rovnice zo zadania je ekvivalentné hľadaniu koreňov rovnice $f(x) = 0$, teda chceme ukázať, že táto rovnica má koreň z intervalu $(0,1)$. Pre funkciu f platí $f(0) = 1 > 0$ a $f(1) = k < 0$. Keďže je funkcia f spojitá na intervale $(0,1)$, musí existovať bod x_0 z tohto intervalu, pre ktorý platí $f(x_0) = 0$, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie: Nakreslime si grafy funkcií, ktoré sa nachádzajú na oboch stranách rovnice: $f_1(x) = x - 1$ a $f_2(x) = kx^2$:



Grafom funkcie f_1 je priamka a grafom funkcie f_2 je parabola otvorená smerom nadol, pretože $k < 0$. Funkcie f_1 a f_2 sa vďaka tomu, že sú spojité, pretínajú v bode X, ktorý je vnútorným bodom úsečky spájajúcej body $[0,-1]$ a $[1,0]$. Ten má ale svoju x-ovú súradnicu x_0 z intervalu $(0,1)$, čo sme chceli dokázať.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Väčšina z vás riešila túto úlohu pomocou hľadania koreňov kvadratickej rovnice. Pri ukazovaní toho, že jeden z nich patrí do intervalu $(0,1)$, ste mnohí zabúdali na ekvivalentnosť používaných úprav. Za tvrdenie, že druhá mocnina ľubovoľného reálneho čísla je kladné číslo, ste strácali 1 bod, pretože pre nulu to neplatí. Za riešenia, ktoré spočívali na overení tvrdenia pre niektoré k, ste mohli získať 1 bod, pretože nikomu z vás sa určite nepodarilo vyskúšať všetky záporné reálne čísla.

6. Chodec vybehol po schodoch stúpajúceho eskalátora (pohyblivých schodoch) do výšky 10 m a späť za 73 sekúnd. Druhýkrát urobil to isté na rovnakom, ale klesajúcom eskalátore za 4 minúty a 22 sekúnd. Vypočítajte rýchlosť stúpania eskalátora, ak viete, že chodec zbehol dole o 35 % rýchlejšie, ako vybehol hore. Výsledok uveďte v cm/s s presnosťou na dve platné číslice.

Riešenie: Označme si veľkosť rýchlosti stúpania eskalátora e a veľkosť zvislej rýchlosti chodca pri behu nahor ch, obe rýchlosti uvažujme v centimetroch za sekundu. Je zrejmé, že $ch \neq 0$, pretože inak by sa chodec nedostal na koniec eskalátora pri pohybe proti smeru jeho pohybu. Dôležité je, aby obe rýchlosti boli uvažované len vo zvislom smere, lebo ak by sme ich skombinovali, chýbal by nám údaj o sklone eskalátora. Pri behu po stúpajúcom eskalátore sa pohybuje chodec smerom nahor 10 metrov (1 000 cm) rýchlosťou $ch + e$. Túto vzdialenosť prejde za $\frac{1000}{ch+e}$ sekúnd. Smerom nadol sa pohybuje rýchlosťou $1{,}35ch - e$, pretože sa pohybuje smerom nadol proti smeru pohybu eskalátora. Týchto 10 metrov prejde za $\frac{1000}{1{,}35ch-e}$ sekúnd. Celkovo mu to trvalo 73 sekúnd, teda platí

$$\frac{1000}{ch+e} + \frac{1000}{1{,}35ch-e} = 73\,.$$

Podobne dostaneme rovnicu pre klesajúci eskalátor

$$\frac{1000}{ch-e} + \frac{1000}{1{,}35ch+e} = 262\,,$$

pričom na ľavej strane len zmeníme znamienka pri veľkosti rýchlosti eskalátora e a na pravej dosadíme čas 262 sekúnd. Prenásobením menovateľmi a úpravami dostaneme, že táto sústava je ekvivalentná so sústavou

$$\frac{2350}{73}ch = 1{,}35ch^2 + 0{,}35che - e^2\,,$$
$$\frac{2350}{262}ch = 1{,}35ch^2 - 0{,}35che - e^2\,.$$

Odčítaním druhej rovnice od prvej dostávame

$$2350ch\left(\frac{1}{73} - \frac{1}{262}\right) = 0{,}7che\,,$$

odkiaľ po vydelení nenulovým číslom ch dostávame, že

$$e = \frac{634\,500}{19\,126} \doteq 33{,}175\,.$$

Po zaokrúhlení na dve platné číslice dostávame, že rýchlosť stúpania eskalátora je 33 cm/s.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Za sformulovanie správnej sústavy rovníc ste mohli získať 1 bod. 1 bod ste strácali za to, že ste výsledok neuviedli na dve platné číslice (nie dve desatinné miesta). Za priebežné zaokrúhľovanie ste strácali tiež 1 bod. Riešenie úlohy je nezávislé od sklonu eskalátora, pretože sa pýtame na rýchlosť stúpania eskalátora. Ak ste ho na riešenie úlohy potrebovali, strácali ste 1 bod.

7. Nájdite všetky prirodzené čísla *n* s vlastnosťou, že niekoľko prvých cifier čísla n^2 tvorí číslo *n*.

Riešenie: Nech je číslo *n* *k*-ciferné, pričom $k \in \mathbb{N}$. Teda platí $10^{k-1} \le n < 10^k$. Chceme nájsť všetky také n, pre ktoré platí $n^2 = n \cdot 10^l + m$, pričom $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $m < 10^l$. Ak by platilo $l \ge k$, tak potom $10^l \ge 10^k > n$, takže by malo platiť

$$n^2 = n \cdot 10^l + m \ge n \cdot 10^l > n \cdot n = n^2,$$

čo je spor. Preto $l \le k-1$. To znamená, že $m < n$, lebo $m < 10^l \le 10^{k-1} \le n$. Z predošlých úvah vyplýva, že $m = n \cdot \left(n - 10^l\right)$. Pravá strana rovnosti je deliteľná číslom n, teda aj ľavá strana, čiže m, musí byť deliteľná číslom *n*. Lenže jediné $m \in \mathbb{N}_0$ menšie ako n a deliteľné n je $m = 0$. Potom $n^2 = n \cdot 10^l$, teda $n = 10^l$, pričom $l \in \mathbb{N}_0$. Všetky hľadané čísla sú potom 1, 10, 100, ...

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Ak ste našli všetky riešenia, ale nezdôvodnili ste, prečo žiadne iné čísla nevyhovujú podmienke zo zadania, dostali ste 1 bod.

8. Dokážte, že funkcia $\rho(x,y): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, kde $x = (x_1, x_2)$ a $y = (y_1, y_2)$, definovaná predpisom

$$\rho(x,y) = \left(\sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|}\right)^2$$

spĺňa tzv. trojuholníkovú nerovnosť, t. j. pre všetky $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ platí

$$\rho(x,y) + \rho(y,z) \ge \rho(x,z).$$

Riešenie: Uvažujme tri prvky množiny $\mathbb{R}^2$: $x = (1,0)$, $y = (0,0)$ a $z = (0,1)$. Ľahko overíme, že platí $\rho(x,y) = 1$, $\rho(y,z) = 1$, ale $\rho(x,z) = 4$, teda tvrdenie zo zadania neplatí.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): V zadaní úlohy nebola chyba, chceli sme vedieť, ako sa popasujete s dokazovaním tvrdenia, ktoré neplatí. Len trom z vás sa podarilo prísť na to, že tvrdenie neplatí. Niektorí z vás čestne priznali, že tvrdenie nevedia dokázať, väčšina z vás však nejasné kroky v riešení (ktoré samozrejme neplatili) prehlásila za zrejmé. Nuž, ako sa ukázalo, až také zrejmé neboli...

9. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla *k* platí

$$\prod_{n=2}^{k} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} > \frac{2}{3}.$$

Riešenie: Výraz zo zadania si môžeme upraviť takto:

$$\prod_{n=2}^{k}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\prod_{n=2}^{k}\frac{n-1}{n+1}\cdot\prod_{n=2}^{k}\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$$

Teraz upravíme prvý člen súčinu:

$$\prod_{n=2}^{k}\frac{n-1}{n+1}=\frac{2-1}{2+1}\cdot\frac{3-1}{3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{k-1}{k+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{k-1}{k+1}=\frac{1\cdot 2}{k\cdot(k+1)}$$

Čitateľ *i*-teho zlomku sa vykrátil s menovateľom $(i-2)$-hého zlomku. Zostali len čitatele prvých dvoch zlomkov a menovatele posledných dvoch zlomkov.

Podobným spôsobom môžeme upraviť aj druhý člen súčinu:

$$\prod_{n=2}^{k}\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}=\prod_{n=2}^{k}\frac{n\cdot(n+1)+1}{(n-1)\cdot n+1}=\frac{7}{3}\cdot\frac{13}{7}\cdot\frac{21}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{k\cdot(k+1)+1}{(k-1)\cdot k+1}=\frac{k\cdot(k+1)+1}{3}$$

Čitateľ *i*-teho zlomku sa vykrátil s menovateľom $(i+1)$-vého zlomku. Zostal len čitateľ posledného zlomku a menovateľ prvého zlomku. Potom platí

$$\prod_{n=2}^{k}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{k\cdot(k+1)}\cdot\frac{k\cdot(k+1)+1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{k\cdot(k+1)+1}{k\cdot(k+1)}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3\cdot k\cdot(k+1)}>\frac{2}{3},$$

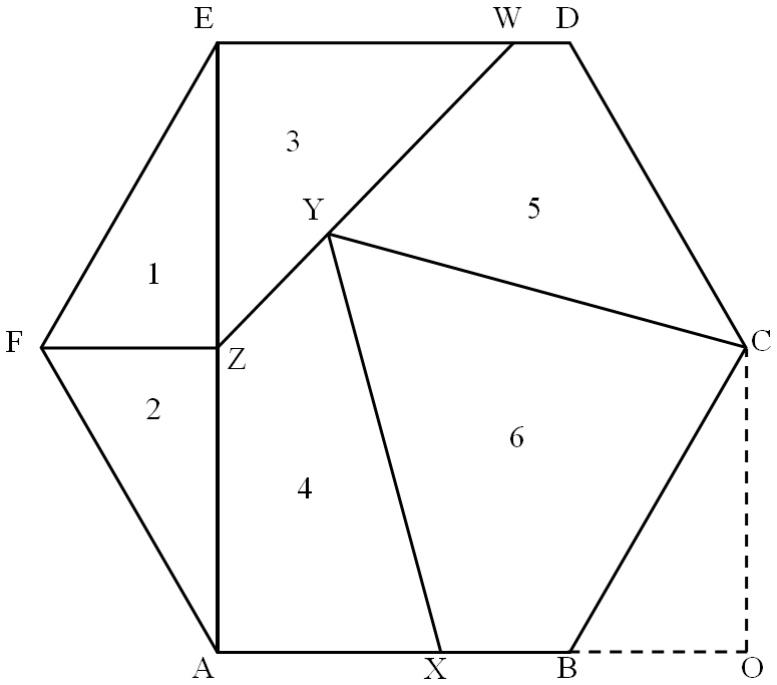
pretože výraz $\frac{2}{3\cdot k\cdot(k+1)}$ je kladný pre každé prirodzené číslo *k*. Tým je tvrdenie zo zadania dokázané.

Komentár (opravovala Katarína Škrovinová): Ak ste pri dôkaze nejakej nerovnosti zabudli spomenúť, že ste použili len ekvivalentné úpravy, stratili ste jeden bod. Niektorí riešitelia dokázali, že všetky činitele sú väčšie ako $\frac{2}{3}$, a potom tvrdili, že aj súčin musí byť väčší ako $\frac{2}{3}$. To ale nie je pravda, vezmime si napr. číslo $\frac{7}{9}$. To je väčšie ako $\frac{2}{3}$, ale súčin $\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}=\frac{49}{81}$ je menší ako $\frac{2}{3}$.

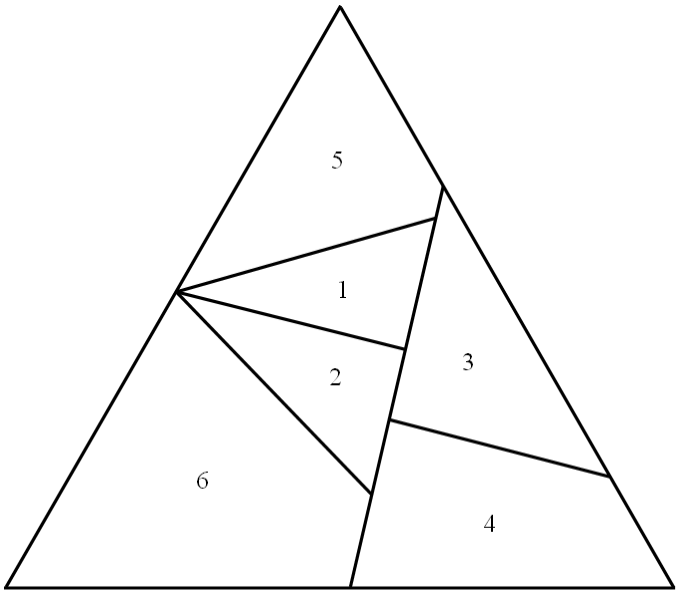
10. Rozdeľte pravidelný šesťuholník piatimi priamymi rezmi tak, aby sa z jeho častí dal zostaviť rovnostranný trojuholník.

Riešenie: Uvažujme rozdelenie trojuholníka ako je na prvom obrázku. Rozdelenie šesťuholníka dostaneme takto: Bod *Z* je stredom úsečky *AE*. Bod *O* je pätou kolmice z bodu *C* na priamku *AB*. Bod *X* zostrojíme tak, že platí $|OX|=|OC|$ a bod *X* patrí úsečke *AB*. Bod *Y* zostrojíme tak, že trojuholník *XCY* je rovnostranný a bod *Y* patrí vnútru šesťuholníka. Nakoniec zostrojíme bod *W* ako prienik polpriamky $\overrightarrow{ZY}$ a úsečky *DE* (pre úplnosť je potrebné dodať, že ešte treba dokázať, že bod *W* je vnútorným

bodom úsečky *DE*). Vzniknuté útvary si označíme číslami 1 až 6 a poskladáme ich, ako je to naznačené na ďalšom obrázku.



Pre úplnosť je potrebné dodať, že na to, aby bolo riešenie kompletné, je potrebné ešte dokázať, že sa jednotlivé útvary dajú poskladať tak, ako je to na obrázku. To znamená, že treba dokázať, že budú „sedieť“ príslušné dĺžky a uhly a že vnútri nevzniknú žiadne prázdne miesta ani prekrývajúce sa časti.



Komentár (opravoval Martin Hriňák): Táto úloha bola najťažšia zo všetkých v tejto sérii – rozklad na požadované útvary sa podarilo nájsť v literatúre len Albertovi Herencsárovi, avšak aj u neho chýbal dôkaz, že sa jednotlivé diely dajú poskladať do požadovaného trojuholníka. Táto časť je tiež veľmi náročná. Väčšina nesprávnych riešení spočívala v dôkaze, že sa to poskladať nedá. Ako však naše riešenie ukazuje, poskladať sa to dá.

11. Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla x, y, z platí

$$x+y+z \le 2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{y+x}\right).$$

Riešenie: Keďže sú x, y, z kladné čísla, tak výrazy $\sqrt{x+y}$, $\sqrt{y+z}$, $\sqrt{x+z}$ sú reálne čísla a môžeme použiť Cauchyho-Schwarzovu-Buňakovského nerovnosť:

$$(x+y+z)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\sqrt{y+z}+\frac{y}{\sqrt{x+z}}\sqrt{x+z}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\sqrt{x+y}\right)^2 \le$$

$$\le \left[\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x+z}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2\right].\left[\left(\sqrt{y+z}\right)^2+\left(\sqrt{x+z}\right)^2+\left(\sqrt{x+y}\right)^2\right]=$$

$$=\left[\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right].[2(x+y+z)]$$

Dostali sme nerovnosť

$$(x+y+z)^2 \le 2(x+y+z).\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right).$$

Túto nerovnosť môžeme vydeliť kladným výrazom $x+y+z$ a dostaneme nerovnosť, ktorú sme chceli dokázať.

Iné riešenie: V tomto riešení využijeme tzv. nerovnosť usporiadania (v anglickej literatúre ju môžete nájsť pod názvom *rearrangement inequality*), ktorej znenie je: *Nech a_1, a_2, ..., a_n a b_1, b_2, ..., b_n sú kladné reálne čísla, n je prirodzené číslo. Súčet $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$ je maximálny, ak postupnosti čísel a_1, a_2, ..., a_n a b_1, b_2, ..., b_n sú rovnako usporiadané (t. j. obidve postupnosti sú neklesajúce alebo obidve sú nerastúce). Tento súčet je minimálny, ak sú tieto postupnosti opačne usporiadané.*

Prejdime k príkladu. Vidíme, že premenné x, y, z sú cyklicky zameniteľné, môžeme preto predpokladať $x \ge y \ge z$. Zrejme platia tiež nerovnosti

$$x^2 \ge y^2 \ge z^2 \quad \text{a} \quad \frac{1}{y+z} \ge \frac{1}{x+z} \ge \frac{1}{x+y}.$$

Použime nerovnosť usporiadania v tomto tvare:

$$2\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\right)=2\left(x^2\frac{1}{y+z}+y^2\frac{1}{x+z}+z^2\frac{1}{x+y}\right)\ge$$

$$\ge\left(x^2\frac{1}{x+y}+y^2\frac{1}{y+z}+z^2\frac{1}{x+z}\right)+\left(x^2\frac{1}{x+z}+y^2\frac{1}{x+y}+z^2\frac{1}{y+z}\right)=$$

$$=\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{x^2+z^2}{x+z}.$$

Vieme, že pre kladné reálne čísla a, b platí nerovnosť medzi kvadratickým a aritmetickým priemerom

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Využime túto nerovnosť pre dvojice z čísel x, y, z a dostaneme, že platí

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{x^2+z^2}{x+z} \geq \frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2} = x+y+z.$$

Spojením uvedených nerovností dostaneme nerovnosť, ktorú sme chceli dokázať.

Komentár (opravoval Michal Takács): Úloha sa dala vyriešiť mnohými ďalšími spôsobmi, môžete si skúsiť nejaký nájsť.

12. Majme danú priamku p. Označme na nej žltou farbou všetky tie body, ktoré zodpovedajú číslam tvaru $81x+100y$, kde x a y sú prirodzené čísla. Body na priamke zodpovedajúce ostatným celým číslam označme oranžovou farbou. Zistite, či existuje na priamke taký bod, vzhľadom na ktorý ľubovoľná symetrická dvojica bodov zodpovedajúcich celým číslam je zafarbená rôznymi farbami.

Riešenie: Keďže čísla 81 a 100 sú nesúdeliteľné, tak čísla 81.1, 81.2, ..., 81.100 dávajú po delení číslom 100 rôzne zvyšky, a teda sa medzi nimi aj všetky objavia, každý práve raz. To znamená, že všetky žlté body dostaneme tak, že k týmto číslam pripočítame nejaký prirodzený násobok čísla 100. To ale znamená aj to, že najmenšie žlté číslo je $181 = 81+100$ a najväčšie oranžové číslo je $8\,100 = 81.100$. Znamená to aj, že všetky celé čísla menšie ako 181 budú zafarbené oranžovou farbou, a všetky celé čísla väčšie ako 8 100 budú zafarbené žltou. Preto jediný bod, ktorý by mohol byť riešením našej úlohy, musí zobrazovať bod 181 na 8 100. Jeho hodnota musí byť

$$s = \frac{181+8\,100}{2} = \frac{8\,281}{2}.$$

Každé žlté číslo môžeme napísať v tvare

$$ž = 181+81a+100b,$$

kde a, b sú nezáporné celé čísla. Jeho symetrický obraz vzhľadom na s sa potom rovná

$$o = 2s - č = 8281 - (181+81a+100b) = 8100 - 81a - 100b.$$

Už nám ostáva dokázať len to, že číslo o je oranžové. Na dôkaz sporom predpokladajme, že je žlté. Potom je aj číslo $w = o+81a+100b$ žlté, pretože je v požadovanom tvare zo zadania. Predpokladajme, že by bolo číslo o v tvare

$$o = 81x+100y,$$

kde x, y sú prirodzené čísla.

Potom by muselo platiť

$$w = o + 81a + 100b = 81(x + a) + 100(y + b),$$

pričom čísla $x + a$, $y + b$ sú tiež prirodzené, lebo a a b sú nezáporné celé čísla. To teda znamená, že číslo w je žlté. To je však spor s tým, že číslo 8 100 je oranžové. Preto je číslo o oranžové, čo sme chceli dokázať.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Trom riešiteľom sa podarilo dostať až k určeniu hodnoty čísla s. Body ste strácali hlavne za neúplný dôkaz toho, že tento bod s má požadované vlastnosti.

13. Nájdite súčet

$$\sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2},$$

ak $x_i = \frac{i}{101}$ pre všetky i.

Riešenie: Ľahko overíme, že pre všetky reálne čísla x platí nasledujúca rovnosť:

$$\frac{x^3}{1 - 3x + 3x^2} + \frac{(1-x)^3}{1 - 3(1-x) + 3(1-x)^2} = 1.$$

Obidva výrazy na ľavej strane sú dobre definované, keďže menovateľ je vždy kladný (overte si to napríklad úpravou menovateľa na štvorec). Z toho dostávame, že platí

$$x_i + x_{101-i} = \frac{i}{101} + \frac{101 - i}{101} = 1$$

pre všetky i. Využijeme to pri hľadaní súčtu:

$$\sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2} = \sum_{i=0}^{50} \left[\frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2} + \frac{x_{101-i}^3}{1 - 3x_{101-i} + 3x_{101-i}^2} \right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{50} \left[\frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2} + \frac{(1 - x_i)^3}{1 - 3(1 - x_i) + 3(1 - x_i)^2} \right] = \sum_{i=0}^{50} 1 = 51.$$

Hľadaný súčet je 51.

Komentár (opravoval Michal Takács): Kľúčom k riešeniu je prísť na to, že platí rovnosť $\frac{x^3}{1 - 3x + 3x^2} + \frac{(1-x)^3}{1 - 3(1-x) + 3(1-x)^2} = 1$. Ako sa na to dá prísť? Číslo 101 nie je v našom prípade ničím výnimočné. Preto si v príklade môžeme skúsiť nahradiť číslo 101 nejakým malým číslom, napríklad číslom 3. Potom číslom 5 a tak ďalej. Pri takých malých číslach si ľahko všimneme uvedenú rovnosť. Šikovnejším stačí intuícia ☺.

14. Dokážte, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} \leq \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Riešenie: Keďže pre všetky prirodzené čísla *k* platí nerovnosť $\frac{1}{k} \leq 1$, platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

pričom sme využili to, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, čo je známy vzťah pre výpočet súčtu členov nekonečného geometrického radu (obrázkový dôkaz tohto tvrdenia ste mohli nájsť aj v článku o Mikulášovi z Oresme v minulom čísle časopisu).

Ostáva nám už len dokázať, že platí

$$1 < \pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Vieme, že platí $\pi > 3$, preto platí $\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{3} > \sqrt{2} > 1$, čo sme chceli dokázať.

Iné riešenie: Pomocou Cauchyho-Schwarzovej-Buňakovského nerovnosti dokážeme, že pre $0 \leq x < 1$ platí nerovnosť

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Potom zvolíme $a_0 = 0$, $a_k = \frac{1}{k}$ pre $k > 0$ a $x = \frac{1}{2}$. Dostaneme, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} \leq \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teraz už len využijeme to, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

a dostaneme požadovanú nerovnosť.

Komentár (opravoval Martin Hriňák): Išlo o veľmi ľahkú úlohu, avšak veľa z vás asi odradilo jej zadanie. Vyskytli sa však zásadné chyby pri narábaní s nekonečnými radmi – konvergenciou sa takmer nikto z vás nezaoberal.