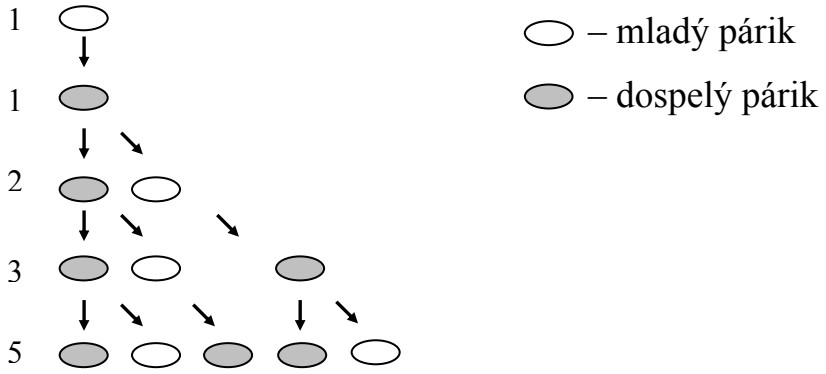
Leonardo z Pisy – vynikajúci matematik svojej doby

Zaujímavá číselná postupnosť

Pozrite sa na postupnosť čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Viete podľa spoznaného pravidla napísať ďalšie čísla? Stačí, keď odhalíte zákonitosť ich postupného vzniku. Tretím číslom počínajúc vzniká táto postupnosť čísel tak, že súčet predchádzajúcich dvoch je hľadaným ďalším číslom. Teda pre každé $i \geq 3$ platí $a_i = a_{i-2} + a_{i-1}$. Postupnosť s touto vlastnosťou je známym príkladom postupnosti danej rekurentne, lebo keď chcete poznať ďalší člen, musíte „bežať späť“ (latinsky *recurrere*), aby ste podľa určitého pravidla použili predchádzajúce členy. Takúto postupnosť vygeneruje riešenie tejto úlohy: *Predstavte si párik králikov (samičku a samčeka). Predpokladajme, že v prvom mesiaci života sa ešte nerozmnožujú a dospejú ako dvojmesačné. Po druhom mesiaci samička každý mesiac vrhne nový párik. Každý párik sa potom rozmnožuje rovnakým spôsobom (a nehynú). Aký bude počet párov králikov postupne na začiatku každého mesiaca?*

Znázornime si danú úlohu:



n-tý člen F_n tejto postupnosti vypočítame ako súčet dvoch predošlých členov:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Počet párov králikov v jednotlivých mesiacoch vytvára postupnosť čísel, ktorú dnes nazývame **Fibonacciho postupnosť**. Tak ju pomenoval francúzsky matematik F. Lucas (1842 – 1891) na pamiatku jedného z najlepších matematikov stredoveku Leonarda z Pisy, ktorého prezývali Fibonacci.

Zo známeho mesta

Okolo roku 1170 sa v rodine mestského pisára v Pise, prezývaného Bonaccio (dobrák), narodil syn Leonardo. Keď vyrástol, odišiel na otcovo prianie do Bougie v Alžírsku, aby sa naučil obchodné počty a aritmetiku. Neskôr si mimoriadne nadaný Leonardo rozšíril vedomosti cestovaním za obchodom po Egypte, Grécku, Sýrii, Byzancii, Sicílii a Provensálsku. Jeho matematické poznatky dosiahli na vtedajšiu dobu

vysokú úroveň. Zvládol dokonale arabskú aritmetiku i algebru. Napísal dve významné učebnice: *Liber abaci – Kniha o abaku* (tu sa pod slovom abak rozumie aritmetika) a *Praktická geometria*. Do dejín matematiky sa zapísal pod menom Leonardo Fibonacci (to znamená Leonardo, syn Dobrákov) alebo Leonardo Pisánsky. Zomrel okolo roku 1240.

Inšpiratívna učebnica



Kniha o abaku vyšla prvýkrát v roku 1202. Leonardo ju neskôr doplnil (1228) a prepracoval. Bola výkladom o výhodách indicko-arabského desiatkového pozičného systému. Obsahovala aritmetiku a algebru lineárnych a kvadratických rovníc v celej hĺbke a úplnosti. Fibonacci v nej skúmal aj rozklad čísel na súčin prvočísel, odhaľoval kritériá deliteľnosti, napr. číslami 2, 3, 5, 9. Podal výklad poznatkov o úmerách. Zlomky upravoval na najmenšie spoločné menovatele. Ako prvý v Európe prišiel na myšlienku zaviesť záporné čísla a predstavovať si ich ako dlh. Vedel dobre riešiť neurčité rovnice a približne určovať druhé i tretie odmocniny. Fibonacci uviedol veľké množstvo výpočtových metód aritmetiky, algebry i teórie čísel, mnohé sú z arabských zdrojov. Poznatky uvádzal na príkladoch a riešených úlohách.

Praktické súvislosti

V roku 1220 napísal Leonardo z Pisy prácu *Prax geometrie* (má osem častí), ktorá obsahuje aj zememeračské postupy, výpočty vzdialeností a výšok. Dokázal v nej, že tri ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. Uviedol geometrické vedomosti zo svojich ciest, ktoré mali vzťah k meraniu veličín, k aritmetike, planimetrii a stereometrii. Leonardo učil určovať vzdialenosti a výšky pomocou kvadrantu rozdeleného určitým spôsobom. Práca *Kniha štvorcov*, napísaná okolo roku 1225, je pokrokom v teórii čísel a obsahuje úlohy na neurčité kvadratické rovnice. Zaujímavosťou je, že Fibonacci vedel vyriešiť kubickú rovnicu $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ veľmi presne v šesťdesiatkových zlomkoch, ale neuviedol, akým spôsobom na to prišiel.

Jednoduchá úloha



Leonardo Pisánsky riešil veľké množstvo úloh a prispel k vytvoreniu matematických metód na riešenie veľkých skupín podobných úloh. Jednoduchú úlohu z Liber abaci určite vyriešite aj vy: *Jeden hovorí druhému: Daj mi 7 denárov a budem mať päťkrát viac ako ty. Druhý hovorí: Daj ty mne 5 denárov a ja budem mať 7 krát viac než ty. Koľko denárov mal každý?* Fibonacci asi dobre poznal arab-

ské diela Al-Chvárizmího, Abu Kámila, Al-Karádžího i Omara Chajjáma. Sprostredkovane poznal aj výsledky čínskej, babylonskej i egyptskej matematiky.

Nesmrteľná postupnosť

Už spomínaná úloha o králikoch má riešenie skryté vo Fibonacciho postupnosti. Budete sa asi čudovať, ale Fibonacciho postupnosť sa objaví, aj keď budete skúmať špirály pri usporiadaní semien v slnečnici, prechod svetelných lúčov cez priesvitné platne alebo postup pri stavbe včelieho plástu. V moderných matematických disciplínach sa využitie vlastností tejto postupnosti objavilo pri optimálnych metódach programovania, pri strojovom triedení, pri generovaní náhodných čísel. Fibonacciho postupnosť má naozaj veľa zaujímavých vlastností.

Kone a ovos

Uveďme ešte jednu pomerne ľahkú úlohu z matematických prác, ktorých autorom je Leonardo z Pisy: *Päť koňov spotrebuje za 9 dní 6 meríc ovsa. Za koľko dní spotrebuje 10 koňov 16 meríc ovsa?* Vyriešte hravo túto úlohu pred svojimi neskôr narodenými súkmeňovcami.

Mohutne prevýšil súdobú úroveň



Bohatosť úloh, rozmanitosť a efektívnosť metód, presvedčivosť výkladu zachovali výsledky prác Leonarda z Pisy pre ďalekú budúcnosť. Spoznal to Luca Pacioli (1445 – 1514) a zaradil tieto poznatky do svojej *Summy aritmetiky*, ktorá vyšla tlačou v Benátkach roku 1494. Leonardo Pisánsky prispel v Európe k zavedeniu indických cifier a nuly. Samostatne rozpracoval nové algebrické postupy pre kupecké počty i geometrické problémy, približné výpočty aj teóriu čísel. Vytvoril nové pôvodné úlohy, kládol dôraz na dôkazové postupy. Stal sa prvým európskym stredovekým matematikom, ktorý nielen zvládol arabskú matematiku a sprostredkoval ju, ale ju aj podstatne obohatil. Medzi prvými používal algebru na riešenie geometrických úloh. Spoznal, že aritmetika, algebra a geometria spolu súvisia a spolu vytvárajú zásadnú matematickú jednotu. Na jeho počesť nazývame známu rovnosť

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2+\left(ad-bc\right)^2=\left(ac-bd\right)^2+\left(ad+bc\right)^2$$

Fibonacciho identita.

Matematické dielo Leonarda z Pisy malo veľký vplyv na rozvoj európskej matematiky a právom je natrvalo zapísané v jej úspešnej histórii.

Dušan Jedinák