Zadania 1. série úloh korešpondenčnej súťaže v školskom roku 2007/2008

1. Štyria chlapci majú spolu 157 guľôčok. Každý z nich, okrem najmladšieho, má o 5 guľôčok menej ako majú jeho mladší kamaráti spolu. Určte, koľko guľôčok má každý chlapec, ak viete, že sa každý narodil v inom roku.

2. Nájdite všetky prirodzené čísla menšie ako 10 000, ktorých ciferný súčet je 11 a sú deliteľné 11.

3. Traja hráči sa dohodnú, že ten, ktorý prehrá, zdvojnásobí peniaze dvom zostávajúcim hráčom. Po troch partiách hry, postupne prehraných všetkými tromi hráčmi, má každý hráč 24 peňazí. Koľko mal každý hráč peňazí, než začali hrať?

4. Rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 6 cm rozdeľte troma úsečkami na štyri trojuholníky, z ktorých jedna časť je opäť rovnostranný trojuholník a zvyšné tri sú zhodné pravouhlé trojuholníky. Vypočítajte dĺžky strán všetkých vzniknutých trojuholníkov.

5. Na strednej škole učia traja učitelia: Kocian, Havran a Jedlička – každý z nich učí práve dva predmety. Učia slovenčinu, ruštinu, angličtinu, matematiku, dejepis a zemepis.

a) Kocian pozval svojich kolegov – učiteľa matematiky a učiteľa slovenčiny – na oslavu svojich narodenín.
b) Učiteľ zemepisu býva neďaleko ruštinára.
c) Všetci traja – Jedlička, učiteľ slovenčiny a učiteľ ruštiny – chodia spolu na výlety.
d) Učiteľ matematiky je lepším športovcom ako Kocian a učiteľ angličtiny.

Čo učí ktorý učiteľ?

6. Určte, koľkými spôsobmi môžeme rozostaviť n veží na šachovnici $n \times n$ tak, aby sa navzájom neohrozovali.

7. Janko tipoval na atletických pretekoch takéto poradie pretekárov: 1. A, 2. B, 3. C, ..., 7. G. V skutočnosti však každý, kto mal iného predbehnúť o dve miesta, zaostal za ním o dve miesta. Dá sa z tejto informácie určiť skutočné poradie v pretekoch?

8. Dokážte, že pre žiadne *n* prirodzené nie je číslo $n \cdot (n+1)$ druhou mocninou prirodzeného čísla.

9. Dokážte, že medzi ľubovoľnými deviatimi po sebe nasledujúcimi prirodzenými číslami existuje aspoň jedno číslo, ktoré je s ostatnými nesúdeliteľné.

10. V triede je 30 žiakov, každému je priradené poradové číslo podľa abecedného zoznamu. Učiteľ vyvoláva žiakov podľa tohto pravidla: sčíta poradové čísla dvoch naposledy vyvolaných žiakov, a ak je súčet väčší ako 30, odčíta 30 od tohto súčtu. Výsledok je poradové číslo žiaka, ktorý je vyvolaný. Dokážte, že nemôžu byť bezprostredne za sebou vyvolaní žiaci Horáček, Šebestová, Mach v tomto poradí.

11. Je daný pravidelný dvanásťuholník $A_1A_2A_3...A_{11}A_{12}$. Vypočítajte obsah lichobežníka $A_1A_2A_4A_5$, ak viete, že polomer kružnice opísanej tomuto dvanásťuholníku sa rovná 12 cm.

.

12. Nech *a*, *b* sú kladné reálne čísla. Dokážte, že rovnica

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0$$

má dva reálne korene, pričom jeden patrí do intervalu $\left\langle \frac{a}{3},\frac{2a}{3}\right\rangle$ a druhý do intervalu $\left\langle \frac{-2b}{3},-\frac{b}{3}\right\rangle$.

13. Dĺžky strán trojuholníka tvoria aritmetickú postupnosť s diferenciou *d* a jeho obsah sa rovná *S*. Určte dĺžky strán tohto trojuholníka pomocou *d* a *S*. Určte tieto strany pre $d=1,\ S=6$.

14. Dokážte, že $\{(m,n)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}:17|(2m+3n)\}=\{(m,n)\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}:17|(9m+5n)\}$.

Termín odoslania riešení úloh 1. série: do 17. 10. 2007

Riešenia zasielajte na adresu:

Metodicko-pedagogické centrum
MATMIX
Tomášikova 4
P. O. BOX 14
820 09 Bratislava 29